京大生の知らない 和算の世界

室町時代ごろに始まり、江戸時代に最盛期を迎えた和算。明治時代以降は "洋算" の影響で廃れていきましたが、現代でもさまざまな分野で活躍して……いるわけないか。それでも、つるかめ算や流水算、旅人算などは皆さんも聞いたことがあるでしょう。そんな面白く、どこか懐かしい和算の一面を紹介します。（一沫）

小町算（こまちざん）

1から9までの数字をこの順に1回ずつ使い、加減乗除のみを用いて100が答えになる式を作る。その式の美しさから、平安時代の美女、小野小町になぞらえてこの名前がついたとも言われている。

例：1×2×3×4+5+6+7×8+9=100
123+45-67+8-9=100

現在では、西暦の数字や与えられた数を小町算のルールを用いて作るという派生型もある。

例：1+2345-6×7×8+9=2019
(1+2+345)×6-78+9=2019
-1-23-4+(5×6-7)×89=2019
1+2-(3+4-5-6)×7×8×9=2019

西洋には1から9までの数字をその値が100になるように、帯分数の形に並べる「センチュリーパズル」というものもある。

例：$96\frac{1428}{357}=100$

京大生に挑戦！

問1　1から9までの数字をこの順に1回ずつ使い、除算（÷）を必ず使って、100を作りなさい。

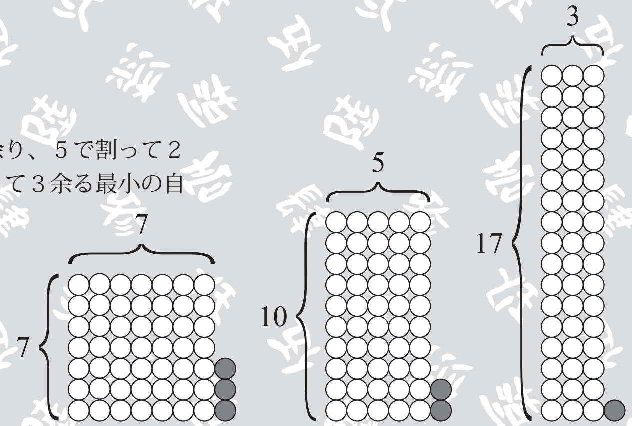
問2　1から9までの数字をこの順に1回ずつ使い、除算（÷）を必ず使って、2019を作りなさい。

百五減算（ひゃくごげんざん）

3,5,7で割った余りから、元の数を求める問題。現在では高校での整数問題や、大学受験のほか、数学オリンピックなどでもよく出題される。条件を共通して満たす数を書き並べていく方法や1次不定方程式で解く方法、合同式を用いる方法など多種多様な解法が知られている。

例：3で割って1余り、5で割って2余り、7で割って3余る最小の自然数は52。

52=7×7+3（左）
52=5×10+2（中）
52=3×17+1（右）



京大生に挑戦！

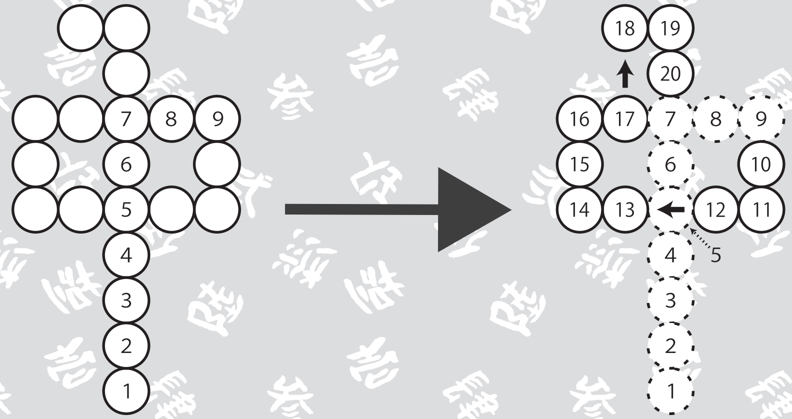
問3　3で割って2余り、5で割り切れ、7で割ると6余る自然数で最小のものを求めなさい。

問4　11で割って6余り、21で割って3余り、31で割って4余る自然数で最小のものを求めなさい。

拾い物（ひろいもの）

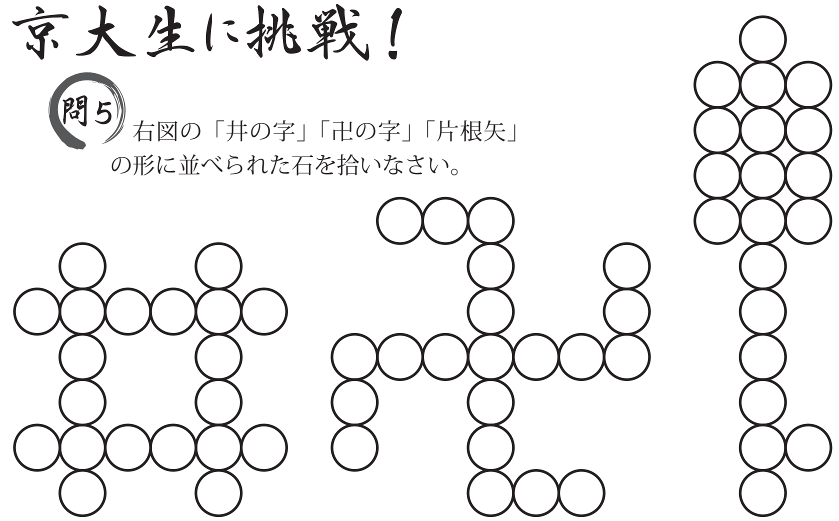
拾い物とは、碁盤の目に並べた石をルールに従ってすべて取るというゲームである。和算らしく漢字の形に石を並べることが多い。右の図は「中の字」である。

【ルール】
1. 上下左右の方向に石を取る。
2. 斜め方向（右図の6から8）や、飛び越すこと（4から5を取らずに6へ行く）、後戻り（2から1を取ってから3へ行く）はできない。一方で、5は取り除かれているため、12から13へと取ることは飛び越すことにはならない。



京大生に挑戦！

問5　右図の「井の字」「卍の字」「片根矢」の形に並べられた石を拾いなさい。



正解はこちら！

問題の正解はこのPDFファイルの次のページから始まります。

参考文献：佐藤健一　著　「中学数学で解ける　和算百話」（東洋出版）

はみだしすてーじ
クロスの倍率ってどれくらいですか？（工・院　クリスタル）
⇒月に平均して70人の応募があるので、大体6～7倍になります。
（ちなみに8カ月すべてに応募すると、少なくとも1回当選する確率は8割を超えるようです。ぜひ応募してくださいね。；編）

はみだしすてーじ
戻りたい、卒研を言葉でしか知らなかったあの頃に（理・4　トトロ）
⇒戻りたい、偏微分や群論の言葉すら知らなかったあの頃に
（和算には加減乗除が定義されている整数環で十分です；編）

らいふすてーじ　6月号
〜京大生の知らない和算の世界〜
京大生に挑戦！　解答例

2019年6月　一沫

らいふすてーじ6月号6ページに掲載されている「京大生の知らない和算の世界」の京大生に挑戦！の解答例である。

小町算

問1　1から9までの数字をこの順に1回ずつ使い、除算（÷）を必ず使って、100を作りなさい。

$$
\begin{array}{llll}
\text{方法1} & (1 \div 2 + 3) \times 4 \times 5 + 6 + 7 + 8 + 9 & = \dfrac{7}{2} \times 20 + 30 & = 100 \\
\text{方法2} & -(1 + 2) \div 3 \times 4 + 5 + 6 \times (7 + 8) + 9 & = -4 + 5 + 90 + 9 & = 100 \\
\text{方法3} & 1 + (2 - 3 \div 4 \times 5 + 6 + 7) \times 8 + 9 & = (15 - \dfrac{15}{4}) \times 8 + 10 & = 100 \\
\text{方法4} & 1 + (2 + 3) \times 4 \div 5 + (6 + 7) \times 8 - 9 & = 1 + 4 + 13 \times 8 - 9 & = 100 \\
\text{方法5} & 1 - 2 \times 3 \times 4 \times 5 \div 6 + 7 \times (8 + 9) & = 1 - 20 + 119 & = 100 \\
\text{方法6} & -1 \times 2 + (3 + 4) \times 5 \times 6 \div 7 + 8 \times 9 & = -2 + 30 + 72 & = 100 \\
\text{方法7} & -1 + 2 + 3 + 4 \times 5 \times 6 \times 7 \div 8 - 9 & = 4 + 840 \div 8 - 9 & = 100 \\
\text{方法8} & (1 + 2 + 3 - 4) \times 5 \times 6 \times (7 + 8) \div 9 & = 2 \times 5 \times 90 \div 9 & = 100
\end{array}
$$

また、2桁以上の数を使うと、次のような式も作ることができる。

$$
\begin{array}{llll}
\text{方法9} & -12 \div 3 - 4 - 5 - 6 + 7 \times (8 + 9) & = -4 - 15 + 119 & = 100 \\
\text{方法10} & 1 \times (2 + 3) \times 4 + 56 \div 7 + 8 \times 9 & = 20 + 8 + 72 & = 100
\end{array}
$$

問2　1から9の数字をこの順に1回ずつ使い、除算（÷）を必ず使って、2019を作りなさい。

$$
\text{方法1} \quad -(1 - 2) \times 3 \div 4 \times 5 \times 67 \times 8 + 9 \quad = 30 \times 67 + 9 \quad = 2019
$$

執筆者は問2に関しては上の1つしか見つからなかったので、他に解を発見した人は、ぜひらいふすてーじ編集部(コンタクトページに移動します)まで報告してほしい。

百五減算

問 3　3 で割って 2 余り、5 で割り切れ、7 で割ると 6 余る自然数で最小のものを求めなさい。

3 で割って 2 余り、7 で割って 6 余る数というのは、3 で割って -1 余り、かつ 7 で割って -1 余る数であり、3 と 7 は互いに素だから 21 で割ると -1 余る。つまり整数 k を用いると $21k-1$ と表される。これは $k=1$ のとき、$21\cdot 1-1=20$ となり、5 で割り切れるから、問 3 の条件を満たす。

逆に $k>1$ のときは明らかに $21k-1>20$ であり、$k\leq 0$ のときは $21k-1\leq -1$ で自然数にならないから適さない。従って、求める解は 20。

問 4　11 で割って 6 余り、21 で割って 3 余り、31 で割って 4 余る自然数で最小のものを求めなさい。

21 で割って 3 余ることから求める数を N とすると、N は整数 a,b,c を用いて、次のように表される。

$$N = 11\cdot 21\cdot a + 21\cdot 31\cdot b + 31\cdot 11\cdot c \tag{1}$$

この式が成り立つことは、以下のようにして正当化される。式 (1) は次のように式変形される。

$$\begin{aligned} N &= 11\cdot(31c+21a)+21\cdot 31\cdot b && (2)\\ &= 21\cdot(11a+31b)+31\cdot 11\cdot c && (3)\\ &= 31\cdot(21b+11c)+11\cdot 21\cdot a && (4)\end{aligned}$$

今、11 と $21\cdot 31$、21 と $31\cdot 11$、31 と $11\cdot 21$ はそれぞれ互いに素なので、$21\cdot 31\cdot b\equiv 6 \pmod{11}, 31\cdot 11\cdot c\equiv 3 \pmod{21}, 11\cdot 21\cdot a\equiv 4 \pmod{31}$ を満たす整数 a,b,c が存在する。N は 11 で割ると 6 余るから、

$$\begin{aligned} N &= 11\cdot 21\cdot a + 21\cdot 31\cdot b + 31\cdot 11\cdot c\\ &\equiv 2b \pmod{11}\end{aligned}$$

だから、$2b\equiv 6 \pmod{11}$ である。2 と 11 は互いに素なので $b\equiv 3 \pmod{11}$。

また、N は 21 で割ると 3 余るので、

$$\begin{aligned} N &= 11\cdot 21\cdot a + 21\cdot 31\cdot b + 31\cdot 11\cdot c\\ &\equiv -100c\equiv 5c \pmod{21}\end{aligned}$$

従って $5c\equiv 3\equiv 3+21\cdot 2\equiv 45 \pmod{21}$ である。5 と 21 は互いに素なので $c\equiv 9 \pmod{21}$。

同様にして、N は 31 で割ると 4 余るから、

$$\begin{aligned} N &= 11\cdot 21\cdot a + 21\cdot 31\cdot b + 31\cdot 11\cdot c\\ &\equiv 200a\equiv 14a \pmod{31}\end{aligned}$$

よって、$14a \equiv 4 \equiv 4 + 31 \cdot 8 \equiv 252 \pmod{31}$ となる。14 と 31 は互いに素なので、$a \equiv 18 \pmod{31}$。

今、整数 p, q, r を用いると、$a = 31p + 18, b = 11q + 3, c = 21r + 9$ と表される。元の式 (1) に代入すると、

$$\begin{aligned} N &= 11 \cdot 21 \cdot (31p + 18) + 21 \cdot 31 \cdot (11q + 3) + 31 \cdot 11 \cdot (21r + 9) \\ &= 11 \cdot 21 \cdot 31 \cdot (p + q + r) + 11 \cdot 21 \cdot 18 + 21 \cdot 31 \cdot 3 + 31 \cdot 11 \cdot 9 \\ &= 7161(p + q + r) + 9180 \end{aligned}$$

ここで、$p + q + r = -1$ とすると $N = 2019$ が得られて、これが求める解である。

また、次のように解く方法もある。今、求める数 N は整数 k, l, m を用いて、

$$N = 11k + 6 = 21l + 3 = 31m + 4 \tag{5}$$

と表される。$21l + 3 = 31m + 4$ を変形すると、$21l - 31m = 1$ であり、これは $l = 3, m = 2$ の特殊解を持つ。

$$21l - 31m = 1,\ 21 \cdot 3 - 31 \cdot 2 = 1$$

の辺々を引くと、$21(l - 3) = 31(m - 2)$。21 と 31 は互いに素なので、整数 t を用いると m は $m = 21t + 2$ と表される。これを (5) に代入すると、

$$N = 11k + 6 = 651t + 66 \tag{6}$$

である。同様にして、$11k - 651t = 60$ を解く。これは、$11(k - 59t) - 2t = 60$ と式変形できるので、$k - 59t = 6, t = 3$ が特殊解。すなわち、$k = 183, t = 3$ である。

$$11k - 651t = 60,\ 11 \cdot 183 - 651 \cdot 3 = 60$$

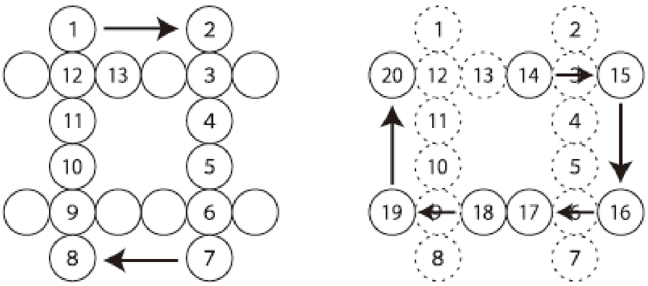
の辺々を引くと、$11(k - 183) = 651(t - 3)$。11 と 651 は互いに素なので、整数 s を用いると、t は $t = 11s + 3$ と表される。これを (6) に代入して、

$$N = 651(11s + 3) + 66 = 7161s + 2019$$

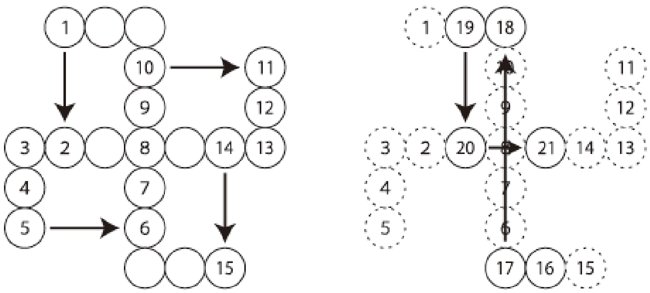
従って $s = 0$ のとき条件を満たし、求める解は 2019 である。

拾い物

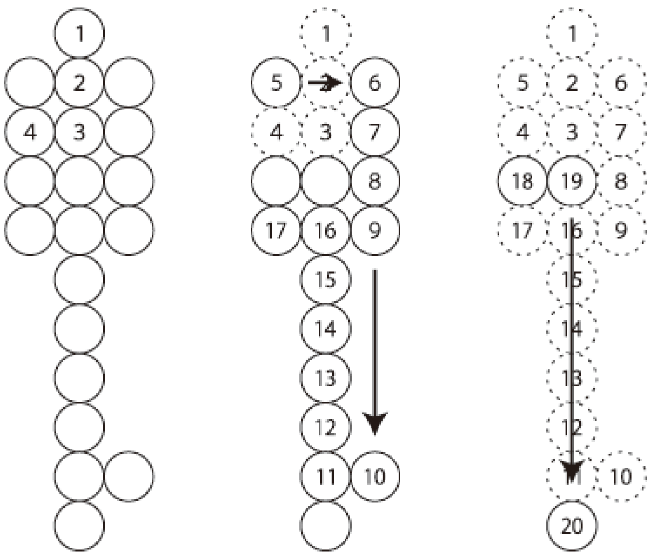
問５　「井の字」「卍の字」「片根矢」の形に並べられた石を拾いなさい。



▲「井の字」を拾う方法



▲「卍の字」を拾う方法



▲「片根矢」を拾う方法

上記に示したのは解答の一例であり、石の取り方は他にもたくさんある。ぜひ他の解法にも挑戦してほしい。