

# らいふすてーじ 6月号

## ～京大生の知らない和算の世界～

### 京大生に挑戦！ 解答例

2019年6月 一沫

らいふすてーじ6月号6ページに掲載されている「京大生の知らない和算の世界」の京大生に挑戦！の解答例である。

#### 小町算

問1 1から9までの数字をこの順に1回ずつ使い、除算(÷)を必ず使って、100を作りなさい。

$$\begin{aligned} \text{方法1} & (1 \div 2 + 3) \times 4 \times 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{7}{2} \times 20 + 30 = 100 \\ \text{方法2} & -(1 + 2) \div 3 \times 4 + 5 + 6 \times (7 + 8) + 9 = -4 + 5 + 90 + 9 = 100 \\ \text{方法3} & 1 + (2 - 3 \div 4 \times 5 + 6 + 7) \times 8 + 9 = (15 - \frac{15}{4}) \times 8 + 10 = 100 \\ \text{方法4} & 1 + (2 + 3) \times 4 \div 5 + (6 + 7) \times 8 - 9 = 1 + 4 + 13 \times 8 - 9 = 100 \\ \text{方法5} & 1 - 2 \times 3 \times 4 \times 5 \div 6 + 7 \times (8 + 9) = 1 - 20 + 119 = 100 \\ \text{方法6} & -1 \times 2 + (3 + 4) \times 5 \times 6 \div 7 + 8 \times 9 = -2 + 30 + 72 = 100 \\ \text{方法7} & -1 + 2 + 3 + 4 \times 5 \times 6 \times 7 \div 8 - 9 = 4 + 840 \div 8 - 9 = 100 \\ \text{方法8} & (1 + 2 + 3 - 4) \times 5 \times 6 \times (7 + 8) \div 9 = 2 \times 5 \times 90 \div 9 = 100 \end{aligned}$$

また、2桁以上の数を使うと、次のような式も作ることができる。

$$\begin{aligned} \text{方法9} & -12 \div 3 - 4 - 5 - 6 + 7 \times (8 + 9) = -4 - 15 + 119 = 100 \\ \text{方法10} & 1 \times (2 + 3) \times 4 + 56 \div 7 + 8 \times 9 = 20 + 8 + 72 = 100 \end{aligned}$$

問2 1から9の数字をこの順に1回ずつ使い、除算(÷)を必ず使って、2019を作りなさい。

$$\text{方法1} \quad -(1 - 2) \times 3 \div 4 \times 5 \times 67 \times 8 + 9 = 30 \times 67 + 9 = 2019$$

執筆者は問2に関しては上の1つしか見つからなかったので、他に解を発見した人は、ぜひらいふすてーじ編集部 ([コンタクトページに移動します](#)) まで報告してほしい。

## 百五減算

問3 3で割って2余り、5で割り切れ、7で割ると6余る自然数で最小のものを求めなさい。

3で割って2余り、7で割って6余る数というのは、3で割って-1余り、かつ7で割って-1余る数であり、3と7は互いに素だから21で割ると-1余る。つまり整数 $k$ を用いると $21k - 1$ と表される。これは $k = 1$ のとき、 $21 \cdot 1 - 1 = 20$ となり、5で割り切れるから、問3の条件を満たす。

逆に $k > 1$ のときは明らかに $21k - 1 > 20$ であり、 $k \leq 0$ のときは $21k - 1 \leq -1$ で自然数にならないから適さない。従って、求める解は20。

問4 11で割って6余り、21で割って3余り、31で割って4余る自然数で最小のものを求めなさい。

21で割って3余ることから求める数を $N$ とすると、 $N$ は整数 $a, b, c$ を用いて、次のように表される。

$$N = 11 \cdot 21 \cdot a + 21 \cdot 31 \cdot b + 31 \cdot 11 \cdot c \quad (1)$$

この式が成り立つことは、以下のようにして正当化される。式(1)は次のように式変形される。

$$N = 11 \cdot (31c + 21a) + 21 \cdot 31 \cdot b \quad (2)$$

$$= 21 \cdot (11a + 31b) + 31 \cdot 11 \cdot c \quad (3)$$

$$= 31 \cdot (21b + 11c) + 11 \cdot 21 \cdot a \quad (4)$$

今、11と $21 \cdot 31$ 、21と $31 \cdot 11$ 、31と $11 \cdot 21$ はそれぞれ互いに素なので、 $21 \cdot 31 \cdot b \equiv 6 \pmod{11}$ 、 $31 \cdot 11 \cdot c \equiv 3 \pmod{21}$ 、 $11 \cdot 21 \cdot a \equiv 4 \pmod{31}$ を満たす整数 $a, b, c$ が存在する。 $N$ は11で割ると6余るから、

$$\begin{aligned} N &= 11 \cdot 21 \cdot a + 21 \cdot 31 \cdot b + 31 \cdot 11 \cdot c \\ &\equiv 2b \pmod{11} \end{aligned}$$

だから、 $2b \equiv 6 \pmod{11}$ である。2と11は互いに素なので $b \equiv 3 \pmod{11}$ 。

また、 $N$ は21で割ると3余るので、

$$\begin{aligned} N &= 11 \cdot 21 \cdot a + 21 \cdot 31 \cdot b + 31 \cdot 11 \cdot c \\ &\equiv -100c \equiv 5c \pmod{21} \end{aligned}$$

従って $5c \equiv 3 \equiv 3 + 21 \cdot 2 \equiv 45 \pmod{21}$ である。5と21は互いに素なので $c \equiv 9 \pmod{21}$ 。

同様にして、 $N$ は31で割ると4余るから、

$$\begin{aligned} N &= 11 \cdot 21 \cdot a + 21 \cdot 31 \cdot b + 31 \cdot 11 \cdot c \\ &\equiv 200a \equiv 14a \pmod{31} \end{aligned}$$

よって、 $14a \equiv 4 \equiv 4 + 31 \cdot 8 \equiv 252 \pmod{31}$ となる。14と31は互いに素なので、 $a \equiv 18 \pmod{31}$ 。

今、整数 $p, q, r$ を用いると、 $a = 31p + 18, b = 11q + 3, c = 21r + 9$ と表される。元の式(1)に代入すると、

$$\begin{aligned} N &= 11 \cdot 21 \cdot (31p + 18) + 21 \cdot 31 \cdot (11q + 3) + 31 \cdot 11 \cdot (21r + 9) \\ &= 11 \cdot 21 \cdot 31 \cdot (p + q + r) + 11 \cdot 21 \cdot 18 + 21 \cdot 31 \cdot 3 + 31 \cdot 11 \cdot 9 \\ &= 7161(p + q + r) + 9180 \end{aligned}$$

ここで、 $p + q + r = -1$ とすると $N = 2019$ が得られて、これが求める解である。

また、次のように解く方法もある。今、求める数 $N$ は整数 $k, l, m$ を用いて、

$$N = 11k + 6 = 21l + 3 = 31m + 4 \tag{5}$$

と表される。 $21l + 3 = 31m + 4$ を変形すると、 $21l - 31m = 1$ であり、これは $l = 3, m = 2$ の特殊解を持つ。

$$21l - 31m = 1, 21 \cdot 3 - 31 \cdot 2 = 1$$

の辺々を引くと、 $21(l - 3) = 31(m - 2)$ 。21と31は互いに素なので、整数 $t$ を用いると $m$ は $m = 21t + 2$ と表される。これを(5)に代入すると、

$$N = 11k + 6 = 651t + 66 \tag{6}$$

である。同様にして、 $11k - 651t = 60$ を解く。これは、 $11(k - 59t) - 2t = 60$ と式変形できるので、 $k - 59t = 6, t = 3$ が特殊解。すなわち、 $k = 183, t = 3$ である。

$$11k - 651t = 60, 11 \cdot 183 - 651 \cdot 3 = 60$$

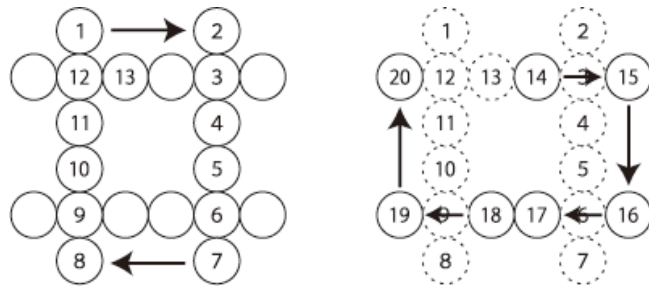
の辺々を引くと、 $11(k - 183) = 651(t - 3)$ 。11と651は互いに素なので、整数 $s$ を用いると、 $t$ は $t = 11s + 3$ と表される。これを(6)に代入して、

$$N = 651(11s + 3) + 66 = 7161s + 2019$$

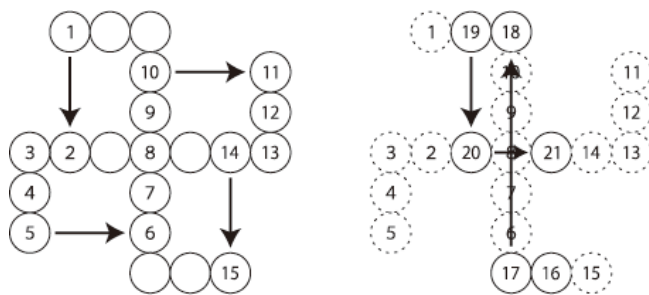
従って $s = 0$ のとき条件を満たし、求める解は2019である。

# 拾い物

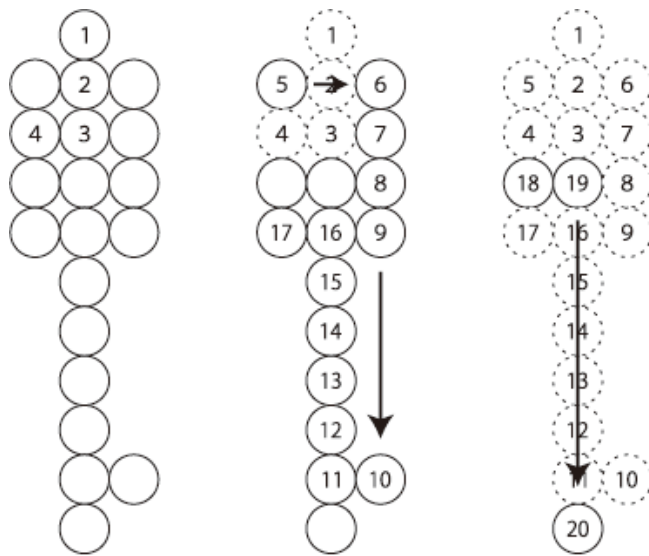
問5 「井の字」「卍の字」「片根矢」の形に並べられた石を拾いなさい。



▲「井の字」を拾う方法



▲「卍の字」を拾う方法



▲「片根矢」を拾う方法

上記に示したのは解答の一例であり、石の取り方は他にもたくさんある。ぜひ他の解法にも挑戦してほしい。