

paradox

「逆説、逆理、背理」。語源はギリシャ語の"para"（「反」「逆」）、"dox"（「意見」）を合わせて"para-dox"。あなたの直感に反する、不思議なパラドックスの世界を覗いてみましょう。（kaeru）

パラドックスとは？

I. 一見すると筋が通っているように思えるにもかかわらず、明らかに矛盾していたり、誤った結論を導いたりするような、言説や思考実験などのこと。

II. 一般的な直感と反した、数学的に正しい解答や定理のこと。

パラドックスの大まかな意味は左の通りです。論理学にある「嘘つきのパラドックス」や「ゼノンのパラドックス」のように古くはIの意味で、パラドックスという言葉が使われていたようです。しかし現在では経済学など、様々な分野でパラドックスは存在し、そのときは「パラドックス」という言葉はよりラフに用いられます（「ジレンマ」、「矛盾」、「意図に反した結果」、「理論と現実のギャップ」など）。

※ちなみに混同されがちですが、矛盾とパラドックスとは本質的に異なる概念です。前者は本来は仮定（公理）や定義がはっきりした状況で用いる言葉であるのに対し、後者は仮定がはっきりしないからこそ起こることを指します。

パラドックス 問題編

それでは、実際にパラドックス問題を解いてみましょう。

基本問題

問1 誕生日のパラドックス

30人のクラスの中に、誕生日が同じ人の組が存在する確率はどのくらいか？（1年は365日で固定）

問2 感染者問題

ある国では1000人に1人の割合である病気にかかっている。その感染判定をできる検査薬を使うと、感染している場合には98%陽性反応が、非感染の場合には99%陰性反応が出る。

ここで、ある人がこの検査薬で陽性反応が出た場合、実際にこの人が感染している確率はどのくらいか？

問3 米海軍の勧誘文句

とある戦時中、米海軍が都市部に住む若者を海軍に勧誘するために、次のような勧誘文句を打ち出した。

『この戦時中に取りった統計によると、米海軍の死亡率は1000人につき9人。それに対して、ニューヨークでは死亡率が1000人につき16人だった。我が海軍の方が、戦争の影響を受けていない都市部よりも死亡率が低いことは明らかである。よって海軍に入っていた方が安全であるといえよう』

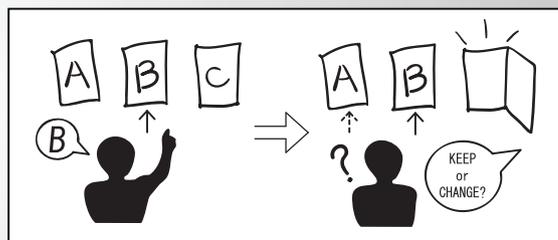
戦争の真っ只中にある海軍の方が安全であるとは、どうにもおかしい理屈だ。しかし、米海軍の統計にはウソも誇張もない。さて、このねじれはどこから来ているのだろうか？

応用問題

問4 モンティ・ホール・ジレンマ

3つのドアのうち、1つのドアの後ろに賞品が置いてあって、他の2つのドアはハズレである。

最初に出演者が1つのドアを選ぶと、商品がどのドアの後ろにあるかを知っている司会者は、出演者が選ばなかった2つのドアのうちハズレのドアを1つ開けて見せる。その上で、出演者に『今なら選択を変えてもいいですよ。どうしますか』と聞く。さてどうしたらよいか。



ヒント

出演者に残されている道は最初の選択を変えないか、あるいは変えてもう1つのドアを選ぶかであり、「確率的にどちらが有利であるか」という問題に帰結します。

パラドックス 解答編

左ページのパラドックス問題の解答です。簡単な解説を交えて説明します。

問1 誕生日のパラドックスの解答と解説

70%を超える。直感で考えるとそこまで高くはならなさそうだが、計算して求めた結果が下記になる。

求める事象の確率を p 、その余事象の確率を p' とする。余事象を求めるには1人を基準にして、(2人目の誕生日が1人目と重ならない確率) × (3人目の誕生日が1人目と2人目と重ならない確率) × … を繰り返す。

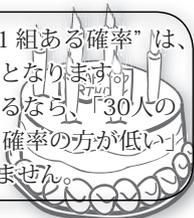
$$p' = \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \dots \times \frac{336}{365}$$

$$p' = 0.2936\dots$$

$$p = 1 - p' = 0.7063\dots$$

Ans. $p = 0.71$

“同じ誕生日の人の組が少なくとも1組ある確率”は、“誕生日が全く重ならない確率”の排反となります。少しでも直感で納得がいく解説をするなら、「30人中、誕生日が全く重複しないという確率の方が低い」という説明がしっくりくるのかもしれませんが。



問2 感染者問題の解答と解説

仮に、100000人を対象に検査を行うとすると

感染者100人の98%に陽性反応が出るから 感陽 98人

感染者100人の2%に陰性反応が出るから 感陰 2人

非感染者99900人の1%に陽性反応が出るから 非感陽 999人

非感染者99900人の99%に陰性反応が出るから 非感陰 98901人

ここで、陽性反応が出た人は合計 $98 + 999 = 1097$ 人。そのうち感染者は98人だから $98 \div 1097 = 0.0893\dots$ よって答えは約8.9%。

検査の精度が98%や99%という高い数値ですから、“陽性反応が出た人は高確率で感染している”と感じてしまうかもしれません。

しかし、検査対象全体のうち非感染者の比率は99.9%とさらに高い数値なので、99%の精度で検査してもなお、感染している人を見つけることは容易でないのです。

コラム 確率問題とパラドックス

上記の誕生日のパラドックスと感染者問題のように、計算で求めた答えが直感と相当かけ離れた答えになることは、確率問題ではよくある現象です。これも一種のパラドックスといえるでしょう。

パラドックスには多種多様な問題があり、基本問題のように答えがはっきり求められるものから、応用問題のように未だ、求め方に定まった見解がない問題もあるので。

納得がいかない人はこの記事を参考に、ぜひ本やインターネット等で詳細を調べてみてください。

問3 米海軍の勧誘文句の解答と解説

統計の対象である人々の質が全く違う。

米海軍では屈強な若者が揃っているのに対し、ニューヨーク市内では生まれたての赤ちゃんから年輩いた老人までもが住んでいる。健康体である若者が一時期に1000人中9人も死んでしまっている状況を、安全と解釈してしまうことがそもそもおかしい。

数理統計を使った広告などは現在でもよく見かけますが、こうした統計データは、数字が与えるインパクトと客観的な信頼性によって、人間の思考を騙す力が非常に強いものです。

ただ、こうした統計結果はあくまでデータに過ぎず、その統計を行った手順と、統計を作った側の意図を考えないと、思わぬ落とし穴に嵌ってしまいます。



問4 モンティ・ホール・ジレンマの解答と解説

『選択を変えた方が有利である』が答え。

『選択を変えない場合に当たる確率は1/3。選択を変えて外れるのは最初に当たりを引いていた場合で、それ以外は当たるわけだから選択を変えて当たる確率は $1 - 1/3 = 2/3$ となる。したがって、選択を変えた方が有利』この問題は、1990年に "Parade magazine" の中の「Ask Marilyn」という質問と回答のコラムで、マリリン・ヴォス・サバントにより求められたこの問題の解が、数百人の数学教授を含む約一万の読者に「解答は間違っている」と指摘を受けたことから、アメリカ中で有名になった。

実際にコンピューターに何万回も試行させた結果、やはり上記の答えの通りの確率が出てくるようです。

しかし、なぜこの答えになるのかという“説明”の部分に関しては、未だに反論が出ています。

コラム あなたの直感とパラドックス

この内容を見て答えに納得する人もいれば、答えが間違っているのではないかと考えてしまう人もいるでしょう。しかしパラドックスの定義は「人間の直感に反する」問題だから、“答えを見てもよく解らない”ということになってもおかしくはないのです。